EXERCICE 2 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME **7 points**

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1. • $g(1) = 2 \times 0 - 1 \times 0 = 0$;

• $g(\mathrm{e}) = 2 \times (\mathrm{e} - 1) - \mathrm{e} \times \ln \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e} \ln \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2$.

2. On sait que $\lim\limits_{x \to +0} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = -2$.

3. g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2 \times 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$.

Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln \mathrm{e} > \ln x \iff \mathrm{e} > x$, donc g est croissante sur l'intervalle $]0~;~\mathrm{e}[$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln \mathrm{e} = \ln x \iff \mathrm{e} = x$, donc g est décroissante sur l'intervalle $]\mathrm{e}~;~+\infty[$;
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 < \ln x \iff \ln \mathrm{e} < \ln x \iff \mathrm{e} < x$, donc $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2$ est le maximum de g sur $]0~;~+\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert\ -2$	$\nearrow$	$\approx 0,718$	$\searrow$	$-\infty$

4.

- Sur l'intervalle $]0~;~\mathrm{e}[$, la fonction g est dérivable, donc continue ; comme $-2 < 0 < \mathrm{e}$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique β de l'intervalle $]0~;~\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$. Or de façon évidente $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;
- Sur l'intervalle $]\mathrm{e}~;~+\infty[$, la fonction g est dérivable, donc continue ; comme

$0,718 > 0$, il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha \in]\mathrm{e}~;~+\infty[$.

On a $g(4,9) \approx 0,01$ et $g(5,0) \approx -0,05$, donc $4,9 < \alpha < 5,0$;

$g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.

5. D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0~;~+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

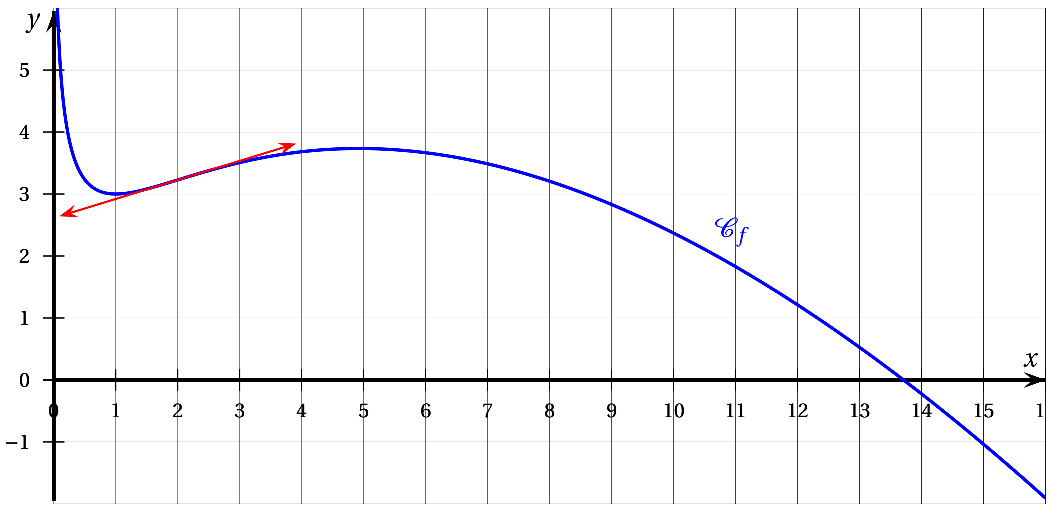
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0~;~+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.



1. On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Sur $]0~;~+\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :

$f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.

Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1~;~\alpha]$: f est croissante sur cet intervalle ;

$f'(x) < 0$ sur $]0~;~1[$ et sur $]\alpha~;~+\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : $(f(\alpha) \approx 3,73)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$\approx 3,73$	↘	$-\infty$

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:

- $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $[0 ; 2]$ la fonction f est convexe ;
- $2 - x < 0 \iff x > 2$ donc sur $[2~;~+\infty]$ la fonction f est concave ;
- $2 - x = 0 \iff x = 2$ donc le point de coordonnées $(2~;~f(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2 \approx 3,23$. (voir la figure : la tangente au point d'abscisse 2 traverse la courbe)